

Gaz parfait

expression paramétrique du modèle fonctionnel

On considère les mesures d'un gaz parfait dans 3 états, qui permettent de former 2 conditions.

$$\frac{\ell_{P2} \cdot \ell_{V2}}{\ell_{T2}} - \frac{\ell_{P1} \cdot \ell_{V1}}{\ell_{T1}} = w_1$$

$$\frac{\ell_{P3} \cdot \ell_{V3}}{\ell_{T3}} - \frac{\ell_{P1} \cdot \ell_{V1}}{\ell_{T1}} = w_2$$

Pour exprimer ces conditions avec des paramètres, il faut en choisir $9 - 2 = 7$. De nombreuses options existent. Celle que M. Mostafa Genena a écrite au tableau noir le 06.12.18 compte parmi les plus simples. Considérant $PV = nRT$, il a choisi $a = nR$ pour relier les états du gaz et exprimé le modèle $\ell - v = f(x) = f(a, V_1, T_1, V_2, T_2, V_3, T_3)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_{P1} - v_{P1} = \frac{a \cdot T_1}{V_1} \\ \ell_{V1} - v_{V1} = V_1 \\ \ell_{T1} - v_{T1} = T_1 \\ \ell_{P2} - v_{P2} = \frac{a \cdot T_2}{V_2} \\ \ell_{V2} - v_{V2} = V_2 \\ \ell_{T2} - v_{T2} = T_2 \\ \ell_{P3} - v_{P3} = \frac{a \cdot T_3}{V_3} \\ \ell_{V3} - v_{V3} = V_3 \\ \ell_{T3} - v_{T3} = T_3 \end{array} \right.$$

On note les caractéristiques suivantes.

- Le modèle fonctionnel n'est pas linéaire.
- La matrice **A** des dérivées partielles est de dimension 9×7 .
- La matrice **A^TPA** à inverser est de dimension 7×7 .

A première vue, l'expression paramétrique est plus compliquée et moins efficace que l'expression conditionnelle.

Si l'on souhaite déterminer toutes les observations compensées, y compris les pressions, la méthode conditionnelle s'impose.

En revanche, la méthode paramétrique permet de déterminer la constante a , qui n'est pas observée directement.

On choisit les paramètres approchés suivants.

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{\ell_{P1} \cdot \ell_{V1}}{\ell_{T1}}, \quad \dot{\mathbf{V}}_1 = \ell_{V1}, \quad \dot{\mathbf{T}}_1 = \ell_{T1}, \dots, \quad \dot{\mathbf{V}}_3 = \ell_{V3}, \quad \dot{\mathbf{T}}_3 = \ell_{T3}$$

On construit le système linéarisé $\left(\ell - \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}) \right) - \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x}$.

$$\begin{bmatrix} \ell_{P1} - \dot{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{T}}_1 / \dot{\mathbf{V}}_1 \\ \ell_{V1} - \dot{\mathbf{V}}_1 \\ \ell_{T1} - \dot{\mathbf{T}}_1 \\ \hline \ell_{P2} - \dot{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{T}}_2 / \dot{\mathbf{V}}_2 \\ \ell_{V2} - \dot{\mathbf{V}}_2 \\ \ell_{T2} - \dot{\mathbf{T}}_2 \\ \hline \ell_{P3} - \dot{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{T}}_3 / \dot{\mathbf{V}}_3 \\ \ell_{V3} - \dot{\mathbf{V}}_3 \\ \ell_{T3} - \dot{\mathbf{T}}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{P1} \\ \mathbf{v}_{V1} \\ \mathbf{v}_{T1} \\ \hline \mathbf{v}_{P2} \\ \mathbf{v}_{V2} \\ \mathbf{v}_{T2} \\ \hline \mathbf{v}_{P3} \\ \mathbf{v}_{V3} \\ \mathbf{v}_{T3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{T}}_1 / \dot{\mathbf{V}}_1 & -\dot{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{T}}_1 / \dot{\mathbf{V}}_1^2 & \dot{\mathbf{a}} / \dot{\mathbf{V}}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \dot{\mathbf{T}}_2 / \dot{\mathbf{V}}_2 & 0 & 0 & -\dot{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{T}}_2 / \dot{\mathbf{V}}_2^2 & \dot{\mathbf{a}} / \dot{\mathbf{V}}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \dot{\mathbf{T}}_3 / \dot{\mathbf{V}}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dot{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{T}}_3 / \dot{\mathbf{V}}_3^2 & \dot{\mathbf{a}} / \dot{\mathbf{V}}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{a} \\ \delta \mathbf{V}_1 \\ \delta \mathbf{T}_1 \\ \hline \delta \mathbf{V}_2 \\ \delta \mathbf{T}_2 \\ \hline \delta \mathbf{V}_3 \\ \delta \mathbf{T}_3 \end{bmatrix}$$

Le choix du modèle fonctionnel n'affecte pas celui du modèle stochastique. On a des observations de types différents, donc on renonce aux cofacteurs. Pour obtenir les poids des observations, on inverse leur matrice de covariance $\mathbf{P} = \mathbf{K}_{\mathbf{u}}^{-1}$.

La résolution de ce système est tout-à-fait classique.

Partition des paramètres

Si l'on souhaite déterminer uniquement la constante $\mathbf{a}$, la partition des paramètres est très avantageuse. $\mathbf{a}$ devient le *paramètre d'intérêt* et les autres paramètres deviennent *auxiliaires*. On en tient compte, mais on ne les résout pas explicitement.

Considérant la structure du modèle fonctionnel linéarisé, on définit les éléments suivants.

$$\mathbf{\dot{v}}_i = \begin{bmatrix} \ell_{Pi} - \mathbf{\dot{a}} \cdot \ell_{Ti} / \ell_{Vi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \ell_{Ti} / \ell_{Vi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} -\mathbf{\dot{a}} \cdot \ell_{Ti} / (\ell_{Vi})^2 & \mathbf{\dot{a}} / \ell_{Vi} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La partition est rigoureuse en l'absence de corrélation entre les observations des différents états du gaz. Autrement dit, la matrice de covariance est bloc-diagonale. Ici on admet que les observations sont indépendantes à l'intérieur d'un bloc.

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \sigma_{Pi}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{Vi}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{Ti}^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Pour chaque état, on calcule $\mathbf{P}_i^* = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_i \mathbf{C}_i (\mathbf{C}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{C}_i)^{-1} \mathbf{C}_i^T \mathbf{P}_i$. Il faut inverser une matrice 2x2.

Ensuite on calcule $\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i^* \mathbf{A}_i$ et $\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i^* \mathbf{\dot{v}}_i$, que l'on cumule pour réaliser la compensation.

$\sigma_{\hat{\mathbf{a}}}^2 = \mathbf{K}_{\mathbf{xx}} = \left(\sum \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i^* \mathbf{A}_i \right)^{-1}$ La matrice à inverser est un scalaire (1x1).

$$\delta \hat{\mathbf{a}} = \delta \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_{\mathbf{xx}} \cdot \sum \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i^* \mathbf{\dot{v}}_i$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{\dot{a}} + \delta \hat{\mathbf{a}}$$

On obtient la constante du gaz, ainsi que sa variance, avec une charge de calcul fortement réduite.

Cependant, cette démarche présente un inconvénient : elle ne donne pas les résidus, donc on ne peut pas calculer le quotient global, ni identifier des fautes ou des erreurs systématiques. En fait, on peut imposer la constante $\hat{\mathbf{a}}$ pour chaque état et obtenir les résidus, mais ces compensations locales limitent sérieusement l'intérêt de la partition.

Pour le gaz parfait, c'est facile de vérifier si la distribution des constantes propres à chaque état $\mathbf{a}_i = \ell_{Pi} \cdot \ell_{Vi} / \ell_{Ti}$ forme une courbe de Gauss centrée en $\hat{\mathbf{a}}$. Une valeur incompatible peut révéler une faute. Dans ce cas, on ne peut pas déterminer si un problème est dû à ℓ_{Pi} , ℓ_{Vi} ou ℓ_{Ti} . Comme on l'a vu avec la compensation conditionnelle, à défaut d'indications complémentaires il faut écarter les trois mesures d'un état fortement divergent.